

## Geodätisches Rechnen

Eine analoge Rechenmaschine im Büro:  
das Planimeter

Von Dr. Detlef Zerfowski und Dipl.-Ing. (FH) Susanne Herden,  
Benningen am Neckar

### 1 Wofür benötigt man Planimeter?

Stellen Sie sich vor, Sie möchten die Fläche Ihres Grundstückes bestimmen und besitzen einen Kartenauszug, auf dem Ihr Grundstück in einem gegebenen Maßstab  $M_K$  abgebildet ist. Sie werden sich sofort an die Geometrieunterrichtsstunden in der Schule erinnern und sagen: „Ganz einfach: Ich messe die Länge  $a$  und Breite  $b$  meines Grundstückes und rechne  $(a \cdot b) / M_K^2$  und fertig.“ In der Praxis sind Grundstücke jedoch nicht rechteckig. Geht man von einem allgemeinen Viereck aus, muss die Fläche bereits mit deutlich höherem Aufwand unter Verwendung trigonometrischer Berechnungen bestimmt werden.

Ist die Grenze eines Gebietes, z. B. die Grenze eines Landkreises, gänzlich unregelmäßig, so ist eine schnelle Flächenberechnung auf obige Weise nicht mehr möglich. Neben Geodäten wurden auch andere Berufszweige mit ähnlichen Problemen konfrontiert. In Ingenieursdisziplinen müssen häufig Flächeninhalte unter gezeichneten Kurven bestimmt bzw. mittels der Integralrechnung berechnet werden. Aber auch im Handwerk, wie der Textil- und Lederindustrie, müssen unregelmäßige Flächen bestimmt werden, z. B. um Preise für Lederstücke fest zu setzen.

Ein geeigneter Rechenapparat für die beschriebenen Aufgaben ist das Planimeter in seinen unterschiedlichsten Ausführungen. Eine weit verbreitete Planimeterart, die sogenannten Polarplanimeter, bestehen aus einem Gewicht (Pol genannt), einem Polarm, einem Fahrarm mit verstellbarer Länge  $l_f$ , dem Fahrstift und einer Messvorrichtung mit Rad und Nonius (Abb. 1). Im Betrieb ist ein Ende des Polarms drehbar im Pol gelagert. Der Pol sichert das Planimeter durch sein Gewicht gegen Verrutschen. Das andere Ende des Polarms ist über ein Gelenk, dem Leitpunkt, mit dem Fahrarm verbunden. Der Fahrstift befindet sich am anderen Ende des Fahrarms. An der Messvorrichtung wird die umfahrene Fläche in Noniuseinheiten abgelesen.

### 2 Benutzung des Planimeters

Zur Erläuterung, wie mit einem Planimeter gearbeitet wird, beschreiben wir die einzelnen Arbeitsschritte anhand eines konkreten Beispiels. Hierzu verwenden wir ein gewöhnliches Polarplanimeter, Typ 31, der Firma Ott (Abb. 1). Als Aufgabe werden wir die Fläche der Gemeinde Benningen aus einer Topographischen Karte mit Maßstab  $M_K = 1:25000$  bestimmen.

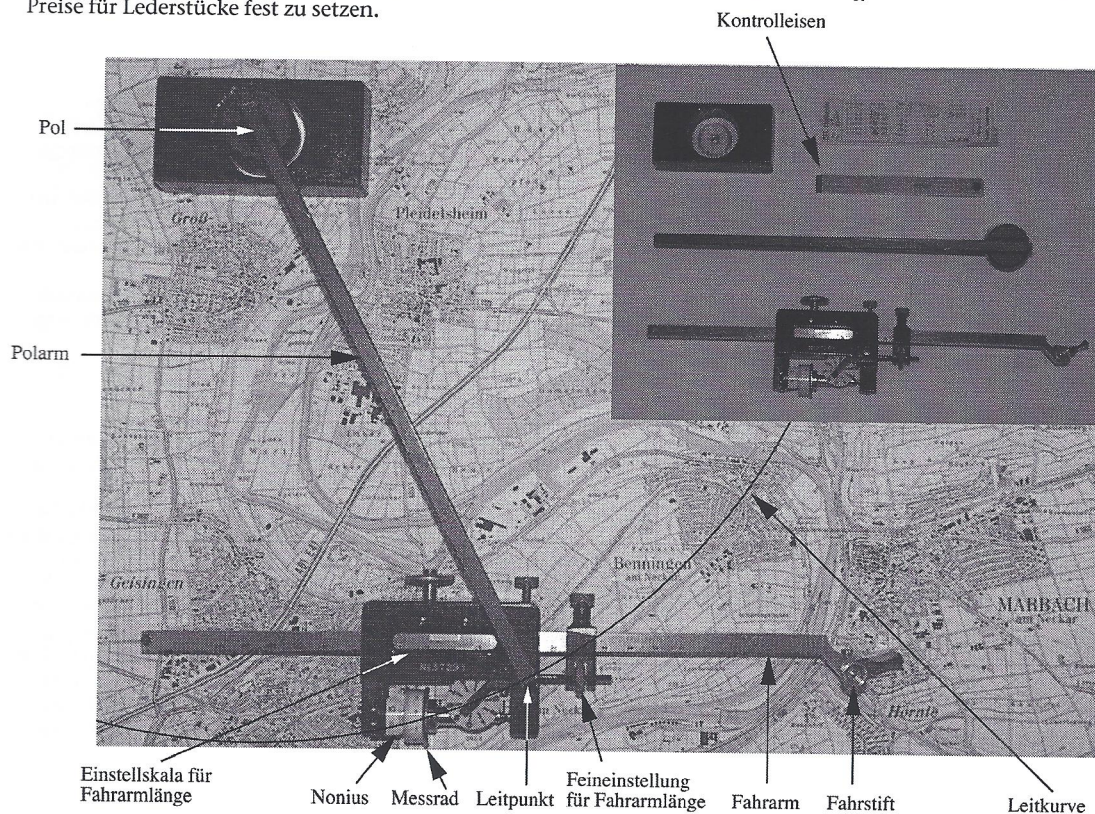


Abb. 1 Planimeter mit seinen wesentlichen Komponenten

OTT-Planimeter		Verhältnisse (1:M)	Fahrstab- Einstellung	Wert der Noniuseinheit relativ (1:M)	absolut (1:1)	Konstante (Pol innen)	Kontrollfläche: 10020 mm <sup>2</sup>	A. Ott, Kempten PI Tdm 30
Typ 31	No. 37291	1:1000	200.00	10 mm <sup>2</sup>	10 mm <sup>2</sup>	23989		
		1:500	160.00	2 "	8 "			
		1:2500	128.00	40 "	6,4 "			
		1:2000	100.00	20 "	5 "			
		1:5000	80.00	100 "	4 "			
						23.5.78		

Abb. 2 Korrekturtabelle für Ott-Planimeter, Typ 31, No. 37291

## 2.1 Kalibrierung

Um einen systematischen Messfehler (u. a. bedingt durch eventuelle Fehler am Planimeter) zu vermeiden, wird vor der eigentlichen Messung das Planimeter durch Ausmessen einer Kontrollfläche folgendermaßen „kalibriert“ bzw. „abgestimmt“.

Jedem Planimeter liegt eine Tabelle (Abb. 2) mit Korrektur- und Einstellwerten bei. Die Einstellwerte geben vor, wie die Länge des Fahrarms bei gegebenen Kartenmaßstab einzustellen ist.

**Fahrarmeinstellung:** Die Fahrarmlänge bzw. Fahrstabeinstellung wird auf einen in der Tabelle angegebenen Wert eingestellt, z.B. 200. Es ist auch möglich, den Fahrarm auf einen anderen Wert z.B. 20 einzustellen. In diesem Fall muss bei den nachfolgenden Betrachtungen ein Faktor

$$\text{Faktor}_{\text{Fahrarm}} := \frac{\text{Fahrarm}_{\text{Tabelle}}}{\text{Fahrarm}_{\text{Ist}}} = \frac{200}{20} = 10$$

einbezogen werden. Der Faktor berücksichtigt, dass je länger der Fahrarm gewählt wird, desto größer der absolute Messwert pro Noniuseinheit ist. In unserem Beispiel stellen wir wegen des Kartenmaßstabes von  $M_K=1:25000$  den Fahrarm entsprechend der Korrekturtabelle auf eine Länge von 128,00 ein (entspricht dem Fahrarmmaßstab 1:2500). Da in Gleichung 1 die Maßstäbe unberücksichtigt bleiben, ergibt sich für unser Beispiel  $\text{Faktor}_{\text{Fahrarm}} = 1$ .

**Kontrollfläche prüfen:** Mit einem dem Planimeter üblicherweise beiliegendem Kontrolleisen wird ein Kreis umfahren. Dazu wird das mit der Nadel versehene Ende des Kontrolleisens in die Unterlage gedrückt, der Fahrstift in die Kerbe am anderen Ende des Kontrolleisens angelegt und anschließend mit dem Fahrstift das Kontrolleisen um die Nadel gedreht. Zu Beginn der Kreisumfahrung wird der am Planimeter angezeigte Wert  $A_1$  abgelesen (erste Ablesung). Am Ende der Kreisumfahrung führt man eine zweite Ablesung durch und erhält den Wert  $A_2$ . Die tatsächliche Kontrollfläche berechnet sich dann gemäß

$$\text{Kontrollfläche}_{\text{Ist}} := (A_2 - A_1) \cdot N_a$$

wobei  $N_a$  der absoluten Fläche pro Noniuseinheit entspricht. Dieser wird entsprechend der eingestellten Fahrarmlänge aus der Abb. 2 entnommen. In unserem Beispiel entspricht eine Noniuseinheit  $6,4 \text{ mm}^2$ . Zur exakteren Bestimmung der Kontrollfläche wird der Kreis mehrmals umfahren und statt der Differenz  $(A_2 - A_1)$  der Mittelwert der mehrfach bestimmten Ablesungsdifferenz verwendet.

In unserem Beispiel ergab sich eine mittlere Differenz  $(A_2 - A_1)$  von 1570 und somit

$$\text{Kontrollfläche}_{\text{Ist}} := 1570 \cdot 6,4 \text{ mm}^2 = 10048 \text{ mm}^2,$$

Aus den beiden zuvor angegebenen Formeln und der in der Korrekturtabelle angegebenen Soll-Kontrollfläche ergibt sich ein Korrekturfaktor  $K_F$ , der bei der eigentlichen Messung berücksichtigt wird.

$$K_F := \frac{\text{Kontrollfläche}_{\text{Tabelle}}}{\text{Kontrollfläche}_{\text{Ist}} \cdot \text{Faktor}_{\text{Fahrarm}}}$$

In unserem Beispiel erhalten wir  $K_F = 10020 \text{ mm}^2 / (10048 \text{ mm}^2 \cdot 1)$ .

Statt mit dem Kontrolleisen kann die Kalibrierung auch durch Umfahren einer eventuell auf der Karte vorgegebenen Kontrollfläche (z. B. in Form vorhandener Gitterkreuze) durchgeführt werden. Diese Art der Kalibrierung hat zusätzlich den Vorteil, dass eventuelle Papierverzerrungen ebenfalls kompensiert werden können.

## 2.2 Flächenmessung

Nach der Bestimmung des Korrekturfaktors  $K_F$  kann nun mit der eigentlichen Flächenmessung begonnen werden.

**Fahrarmeinstellung:** Wie bereits erwähnt wählen wir aufgrund des Kartenmaßstabes  $M_K=1:25000$  nach Abb. 2 den Fahrarmmaßstab  $M_F = 1:2500$  und somit die Fahrarmeinstellung 128,00.

**Flächenfaktor bestimmen:** Aus dem Kartenmaßstab  $M_K$  und dem Fahrarmmaßstab  $M_F$  ergibt sich ein sogenannter Flächenfaktor

$$F_{FK} := \left(\frac{M_F}{M_K}\right)^2 = \left(\frac{1:2500}{1:25000}\right)^2 = 100$$

**Planimeter aufstellen:** Man setzt nun das Planimeter so neben oder in die zu bestimmende Fläche, dass man mit dem Fahrstift den gesamten Rand der Fläche umfahren kann, ohne das Planimeter oder die Fläche verschieben zu müssen. Üblicherweise positioniert man den Fahrstift grob in die Mitte des zu umfahrenden Gebietes und stellt den Pol so auf, dass zwischen Fahrarm und Polarm ungefähr ein rechter Winkel entsteht. Für die folgenden Betrachtungen gehen wir davon aus, dass sich der Pol außerhalb des zu umfahrenden Gebietes befindet. Den Fall des innen liegenden Pols lassen wir unberücksichtigt. Nur für diesen Fall wird die in der Korrekturtabelle angegebene „Konstante (Pol innen)“ benötigt.

1. **Ablesung:** Man setzt nun den Fahrstift auf einen beliebigen, aber eindeutig zu identifizierenden Punkt  $P_1$  auf dem Flächenrand und notiert sich den aktuell an der Messvorrichtung angezeigten Messwert (1. Ablesung)  $A_1$ . Mittels des seitlich am Messrad angebrachten Nonius lassen sich die Werte ohne Schwierigkeiten auf vier Stellen genau ablesen.

**Fläche umfahren:** Ohne Hilfsmittel wird mit dem Fahrstift der Flächenrand langsam und gleichmäßig einmal umfahren. Der nach Erreichen des Ausgangspunktes  $P_1$  angezeigte Messwert  $A_2$  (2. Ablesung) wird wiederum notiert. Fehler, die aus dem nicht exakten Umfahren der Fläche resultieren, lassen sich durch wiederholtes Umfahren der Fläche und anschließender Mittelung der berechneten Ablesungsdifferenzen reduzieren.

**Fläche berechnen:** Die tatsächlich Fläche  $F$  in  $m^2$  errechnet sich, unter Verwendung der aus der Korrekturabelle entnommenen „relativen Noniuseinheit“  $N_r$ , gemäß der Formel

$$F := (A_2 - A_1) \cdot N_r \cdot K_F \cdot F_{FK}$$

Die relative Noniuseinheit gibt an, wie groß die reale Fläche pro Noniuseinheit bei dem gegebenen Fahrarmmaßstab ist. Für den Fahrarmmaßstab 1:2500 ist  $N_r = 40 m^2$ , das heißt eine Noniuseinheit der Messvorrichtung entspricht  $40 m^2$  in Natur. In unserem Beispiel ergibt sich nach diesem Vorgehen

$$F := 1207 \cdot 40 m^2 \cdot \frac{10020}{10048} \cdot 1 \cdot 100 = 4814550 m^2$$

Für die Differenz ( $A_2 - A_1$ ) haben wir die gemittelten Differenzen der Ablesungen aus Tabelle 1 verwendet. Vergleicht man diesen Wert mit dem in einer Information der Gemeinde angegebenen Wert von  $4870000 m^2$  für die Gemeindefläche, so ergibt sich somit lediglich eine Abweichung von 1,14 %.

2. Ablesung	2878	4082	5095	6300	
-1. Ablesung	1672	2878	4082	5095	
$\Delta$	1206	1204	1213	1205	$\varnothing 1207$

Tabelle 1 Planimetermessung der Gemeinde Benningen aus der Topographischen Karte 1:25000

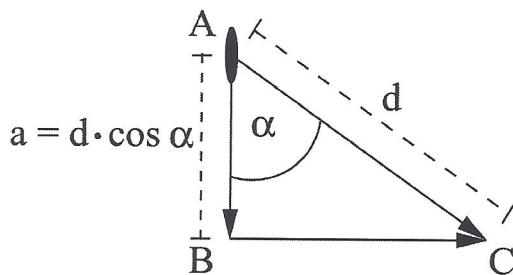


Abbildung 3 Abrollendes und gleitendes Messrad

### 3 Funktionsweise von Planimetern

Bei dem im Polarplanimeter zum Einsatz kommenden Messrad handelt es sich um ein dünne Rolle, die auf der Unterlage entsprechend der Bewegungsrichtung abrollt, gleitet (ohne sich zu drehen) oder beides gleichzeitig. Wird das Rad auf der Unterlage senkrecht zu seiner Achse um eine Strecke  $a$  bewegt (in Abb. 3 von A nach

B), so rollt das Rad die Strecke  $a$  vollständig auf seinem Umfang ab. Bewegt man das Rad in Richtung seiner Achse, so gleitet es über die Unterlage ohne dass es sich dreht (in Abb. 3 von B nach C). Wird das Rad in einem Winkel  $\alpha$  zu seiner Achse um die Distanz  $d$  verschoben, so rollt es von seinem Umfang die Länge  $d \cdot \cos(\alpha)$  ab (in Abb. 3 von A nach C). Geht man davon aus, dass das Messrad einen Umfang  $u$  besitzt, so wird es beim Abrollen der Strecke

$$n = \frac{d \cdot \cos(\alpha)}{u}$$

Umdrehungen durchführen. Diese Umdrehungen würden entsprechend in der Messvorrichtung angezeigt. Der Nachweis, dass ein Planimeter aufgrund eines solch einfachen Mechanismus so „intelligent“ ist, die Fläche eines beliebigen umfahrenen Gebietes bestimmen zu können, ist mathematisch sehr aufwendig. Eine detaillierte, mathematisch exakte Theorie der Planimeter findet sich unter anderen in [Est1961, Mey1941, Wil1951].

### 4 Andere Planimeterarten

In dem zuvor Beschriebenen haben wir uns auf Polarplanimeter beschränkt. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass sich der Leitpunkt zwangsweise auf einem Kreis als Leitkurve bewegen muss (Abb. 1). Andere Planimeterarten unterscheiden sich durch andere Formen ihrer Leitkurve. Beim Linearplanimeter ist die Leitkurve z. B. eine Gerade. Desweiteren existiert noch eine Vielfalt von Planimeterarten, die die umfahrenen Flächen mathematisch verrechnen. Beispiele hierfür sind Potenzplanimeter und Produktplanimeter. Eine detaillierte Planimeter-Klassifikation ist in [Mey1938] zu finden. Eine Übersicht über die verschiedenen Hersteller und deren Planimetermodelle werden wir in einem späteren Artikel geben. Weitere ausführliche Quellen zu Planimetern sind in [Zer1999] zu finden.

Auch heute finden Planimeter in elektronischer Ausführung ihren Einsatz und können z. B. bei der Firma Haff gekauft werden (siehe <http://www.haff.de/planimeter.htm>).

### Literatur

- [Est1961] Alwin Esterle. Lehrbuch für Vermessungstechniker. Verlagsanstalt Courier GmbH, 1961.
- [Mey1938] Walther Meyer zur Capellen. Instrumente zum Integrieren. Eine Übersicht. Zeitschrift für Instrumentenkunde, 58(6), Seiten 93-99, Juni 1938.
- [Mey1941] Walther Meyer zur Capellen. Mathematische Instrumente. Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler, Leipzig, 1941.
- [Pet1985] Günter Petrahn. Vermessungsarbeiten 1. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1. Auflage, 1985.
- [Wil1951] Friedrich Adolf Willers. Mathematische Maschinen und Instrumente. Akademie Verlag, Berlin, 1951.
- [Zer1999] Detlef Zerfowski. Mechanische Rechenmaschinen und Rechenhilfsmittel in der Vergangenheit. Eine Literaturrecherche. Selbstverlag, 1999.

## Leserforum

### Fehler und Korrektur

*Dr.-Ing. Detlef Zerfowski, Autor des Artikels „Eine analoge Rechenmaschine im Büro: Das Planimeter“, in Ausgabe HBW, No. 63, S. 17 bis 19, teilt mit:*

Prof. Dr. Fischer hat uns auf einen Fehler in der Tabelle 1 auf Seite 19 hingewiesen. Die korrigierte Tabelle muss lauten:

2. Ablesung	2878	4082	5295	6500	
-1. Ablesung	1672	2878	4082	5295	
$\Delta$	1206	1204	1213	1205	$\emptyset 1207$

Tabelle 1: Planimetermessung der Gemeinde Benningen aus der Topographischen Karte 1:25000.

Prof. Dr. Fischer erwähnt außerdem, dass die Multiplikation mit dem Korrekturfaktor  $K_F$  für die einzelnen Messungen sehr aufwendig ist und umgangen werden kann, indem die Fahrarmlänge entsprechend dem Korrekturfaktor angepasst wird. (Im Beispiel auf 128,4 statt 128,0.) Hierzu ist jedoch zu bemerken, dass mit dem vorgeschlagenen Verfahren der Papierverzug (Papierausdehnung) noch nicht berücksichtigt wird und dieser gegebenenfalls separat bestimmt werden muss.